Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
“ Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського ”

АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА

(розділ “Рівняння Лагранжа ІІ роду”)

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи студентів

над курсовою роботою

2017

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ
над курсовою роботою
з дисципліни “Аналітична механіка”
(розділ “Рівняння Лагранжа II роду”)

галузі знань – 13 – Механічна інженерія
спеціальності – 133 – Галузеве машинобудування
спеціалізації – Обладнання фармацевтичних та біотехнологічних виробництв

Рекомендовано вченою радою факультету
біотехнології і біотехніки КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2017

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів над курсовою роботою з дисципліни “Аналітична механіка” (розділ “Рівняння Лагранжа II роду”) спеціальності “133-Галузеве машинобудування” спеціалізації “Обладнання фармацевтичних та біотехнологічних виробництв”, електронне видання / Уклад.: Карачун В.В., Мельник В.М. – К.: КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО, 2017. − 19 с.

Гриф «Рекомендовано вченою радою факультету біотехнології і біотехніки КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

(Протокол №10 від 26.05.2017.)

Навчальне видання

АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА

(розділ “Рівняння Лагранжа II роду”)

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи студентів
над курсовою роботою
підготовки бакалавр
галузі знань – 13 – Механічна інженерія
спеціальності – 133 – Галузеве машинобудування
спеціалізації – Обладнання фармацевтичних та біотехнологічних виробництв

Укладачі: *В.В. Карачун*, докт. техн. наук, професор
В.М. Мельник, докт. техн. наук, професор

Відповідальний редактор *Л.І. Ружинська,* кан. техн. наук, доцент

Рецензент *І.В. Коробко,* докт. техн. наук, професор

ЗМІСТ

ВСТУП

Загальні теореми динаміки та отримані з них наслідки дають наочні засоби дослідження руху матеріальної системи. Вміло користуючись ними, можна відразу одержати відповіді на поставлені питання, або скласти диференціальні рівняння, розв’язання котрих окреслить закономірність руху системи. Разом з тим, в деяких випадках користування загальними теоремами пов’язане з певними труднощами. Перш за все, практично неможливо чітко назвати задачі із зазначенням випадків ефективного використання тієї чи іншої теореми, яка б найшвидше вела до мети. Крім того, при складанні диференціальних рівнянь руху матеріальної системи за допомогою загальних теорем динаміки доводиться часто розчленовувати систему, збільшуючи тим самим кількість рівнянь, і, нарешті, вводити невідомі величини (реакції в’язів), визначення котрих не передбачене умовою задачі.

Найбільш загальними методами розв’язання задач механіки є методи аналітичної механіки, що базуються на *принципі віртуальних (можливих)* переміщень, принципі Лагранжа, бо саме Лагранж надав цьому принципу закінчену форму, поклавши його в основу статики. Об’єднавши цей принцип з принципом Даламбера, Лагранж отримав загальне рівняння динаміки, з котрого походять основні рівняння руху матеріальної системи та основні теореми динаміки. Він використовував замість поняття можливих переміщень споріднене поняття віртуальних швидкостей. Принцип можливих переміщень постав результатом узагальнення досліджень дії найпростіших машин-ричагів, поліспастів, нахиленої площини тощо. Перші узагальнення та висновки, що призвели до відкриття принципу можливих переміщень, як підкреслює Лагранж в

«Аналітичній механіці», належать Гвідо Убальді та Галілею. Пізніше ці ідеї набули розвитку в роботах Торічеллі, Декарта та Вілліса. Спроба детального обгрунтування принципу можливих переміщень належить І. Бернуллі, котрий першим звернув увагу на доцільність його використання для розв'язання різних задач статики.

Принцип можливих переміщень полягає в наступному ствердженні – *якщо система матеріальних точок з ідеальними стаціонарними і утримуючими в'язями знаходиться в рівновазі, тоді сума робіт активних сил на можливих переміщеннях дорівнює нулю.* Сума робіт активних сил на можливих переміщеннях буде від'ємною, якщо точки полишають в'язі. Навпаки, якщо точки системи залишаються на в'язях, тоді сума робіт активних сил на можливих переміщеннях цих точок, за умови рівноваги системи, завжди дорівнює нулю.

Принцип Даламбера дозволяє поширити принцип можливих переміщень на випадок коли матеріальна система рухається. Дійсно, додавши до точок системи відповідні сили інерції, можна вважати, що система знаходиться у стані динамічної рівноваги. Відтоді стає можливим застосувати принцип віртуальних переміщень і отримати, як результат, так званий *принцип Даламбера-Лагранжа*. Якщо на систему накладено ідеальні в'язі, сума робіт, активних сил та сил інерції на можливих переміщеннях не є додатньою. Означена сума робіт дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли точкам системи надають можливі переміщення, залишаючи їх на в'язях.

Загальне рівняння динаміки створює можливість для складання диференціальних рівнянь руху, які не містять в собі реакцій ідеальних в'язів, але в багатьох випадках призводить до складних математичних перетворень, котрі, якщо їх одного разу виконати у загальному вигляді, дають можливість одержати рівняння Лагранжа II роду. Головною відміною методики розв’язання задач за допомогою рівнянь Лагранжа II роду, порівняно з іншими методами, що будуються на використанні теорем динаміки, слугує єдина загальна послідовність окремих етапів розв’язання і дослідження кожної задачі. Рівняння Лагранжа II роду є основою не тільки теоретичної механіки та її застосувань, але й інших наук, що становлять предмет теоретичної фізики. Вони являють собою, по суті, правила складання диференціальних рівнянь руху матеріальної системи в узагальнених координатах.

Таким чином, остаточний вигляд рівнянь визначається залежністю кінетичної енергії системи від узагальнених координат, узагальнених швидкостей та сил, що діють на систему. Тому цей метод часто-густо називають *«енергетичним»*.

Принцип можливих переміщень в остаточному вигляді формулюється наступним чином – *для того, щоб система матеріальних точок, яка підпорядкована ідеальним стаціонарним та утримуючим в’язям, знаходилась в рівновазі, необхідно і достатньо, аби робота всіх активних сил на будь-якому можливому переміщенні системи, а також швидкості усіх точок на початку дорівнювали нулю*, тобто –

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k} \delta \overrightarrow{r_k} = 0, \quad \overrightarrow{V_k}(0) = 0, \quad (k = 1, ..., n).$$

Можливим переміщенням k-ї точки іменується таке уявне, мале за величиною переміщення $\delta \overrightarrow{r}_k$, яке подумки здійснюється з даного положення при зупиненому часі t, яке з точністю до членів першого порядку малості включно не протирічить в’язям. Принцип можливих переміщень відображає в загальному вигляді умови рівноваги для будь-якої механічної системи і враховує тільки активні сили, вилучаючи з розгляду усі невідомі реакції в’язів, якщо вони є ідеальними. Для розв'язання задач за допомогою принципу можливих переміщень, необхідно:

- визначити всі діючі на систему активні сили (побудувати систему діючих сил);
- за неідеальних в'язів додати відповідні реакції, умовно переводячи їх до розряду *«активних»* сил (наприклад, сили тертя);
- в разі необхідності, визначити реакції в'язів, подумки відкинувши відповідну в'язь та замінивши її дію шуканою реакцією;
- надати системі можливі переміщення, коли деякі координати отримали б незалежні довільні можливі переміщення, число яких має бути таким самим, як число ступенів вільності системи. Можливі переміщення, що відповідають іншим координатам системи, мають бути наведені у функції від цих незалежних можливих переміщень. Ступені вільності s системи обчислюється за формулою:

$$s = 3n - k,$$

де n – кількість матеріальних точок, що складають систему, k – кількість ідеальних в'язів, що накладені на неї;
- обчислити можливу роботу всіх активних сил (в тому числі тих реакцій, які умовно зачислені до активних сил) на відповідних можливих переміщеннях і прирівняти її до нуля. Коефіцієнти при незалежних можливих переміщеннях в цьому рівнянні повинні дорівнювати нулю кожний;
- розв'язати рівняння рівноваги (в окремому випадку системи з одним ступенем вільності – одне рівняння), обчислити шукану величину.

Декілька слів стосовно визначення поняття *узагальненої сили*.

Узагальненою силою Q є фізична величина, що чисельно окреслюється як коефіцієнт при варіації узагальненої координати δq у виразі для віртуальної роботи δA, тобто

$$\delta A = Q\delta q\,.$$

Звідси походить, що розмірність "*зліва*" і "*справа*" у цьому виразі повинні співпадати. Отже, якщо узагальненою координатою є лінійне переміщення, тоді узагальненою силою Q є ньютонова сила. Якщо q – це кут повороту (в *рад*), тоді Q – момент сили (в *Нм*). Якщо q – тиск $\left(\hat{a}\ H\grave{\imath}^{-2}\right)$, тоді Q являється об'ємом $\left(\hat{a}\ \grave{\imath}^{3}\right)$ і т.д.

Приклад застосування рівнянь Лагранжа ІІ роду

для побудови диференціальних рівнянь механічної системи.

Скласти диференціальні рівняння руху еліптичного маятника, який містить повзун M_1 масою m_o і ковзає без тертя по горизонтальній площині, а також кульку M_2 масою m, яка з'єднана шарніром з повзуном стержнем АМ довжиною l. Масою стержня нехтувати.

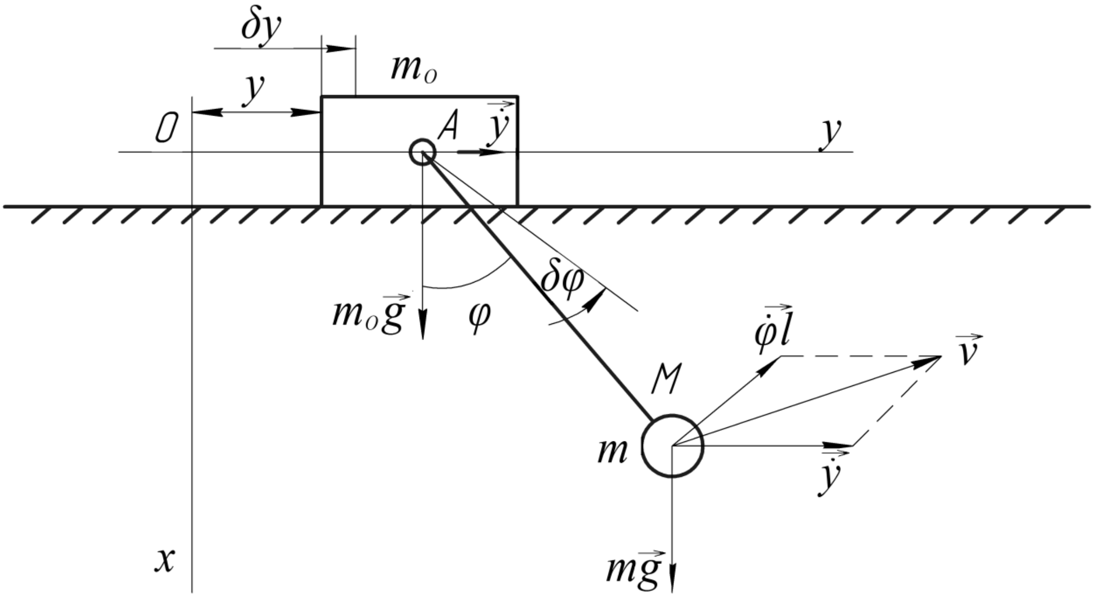


Рис.1 Розрахункова схема

Перш за все, слід визначити кількість ступенів вільності. У даному випадку два ступеня вільності – поступальне переміщення уздовж осі Оу та коливання стрижня з кулькою на кінці. Отже, для опису руху еліптичного маятника слід скласти два диференціальних рівняння.

Залишається обрати дві незалежні узагальнені координати. Безумовно, це координата у та кут φ.

Отже, рівняння руху у формі диференціальних рівнянь Лагранжа ІІ роду набувають вигляду –

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial T}{\partial y}=Q_y;$$
$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_\varphi, \quad (1)$$

де T – кінематична енергія механічної системи в абсолютному рухові; Q_y, Q_φ – узагальнені сили

$$T=T_1+T_2=\frac{m_0\dot{y}^2}{2}+\frac{m}{2}(\dot{y}^2+\dot{\varphi}^2l^2+2\dot{y}\dot{\varphi}l\cos\varphi);$$
$$\frac{\partial T}{\partial y}=0;$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=(m_0+m)\dot{y}+m\dot{\varphi}l\cos\varphi;$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=(m_0+m)\ddot{y}+ml(\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\sin\varphi);$$
$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=-m\dot{y}\dot{\varphi}l\sin\varphi;$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=m(\dot{\varphi}l^2+\dot{y}l\cos\varphi);$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=ml(\ddot{\varphi}l+\ddot{y}\cos\varphi-\dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi).$$

Обчислюємо узагальнені сили Q_i:

Віртуальна робота δA активних сил (масових сил) дорівнює:

$$\delta A=Q_y\cdot\delta y=0;$$
$$Q_y=0;$$
$$\delta A=Q_\varphi\cdot\delta\varphi=-mgl\sin\varphi\delta\varphi;$$
$$Q_\varphi=-mgl\sin\varphi.$$

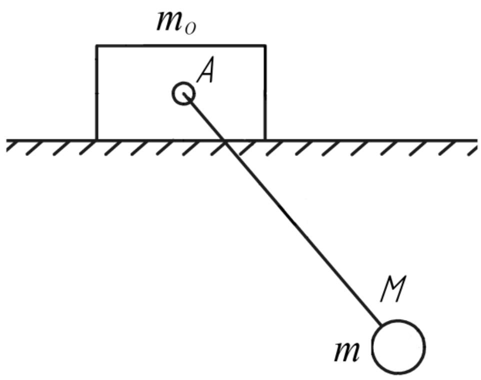
Залишається підставити обчислені величини у рівняння (1):

$$(m_0+m)\ddot{y}+ml(\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\sin\varphi)=0; \quad (2)$$

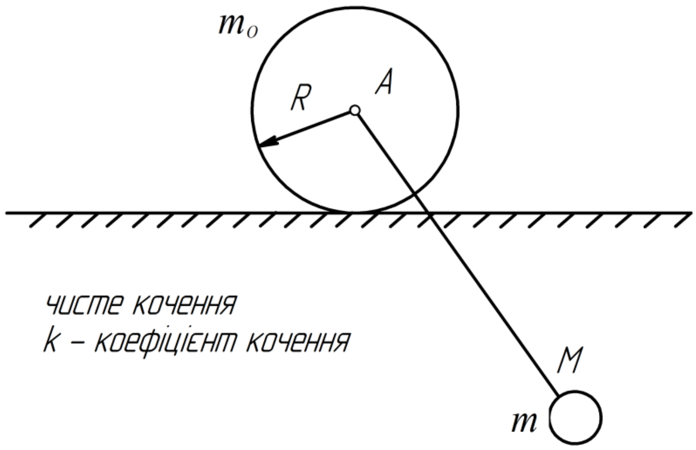
$$ml(\ddot{\varphi}l+\ddot{y}\cos\varphi-\dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi)+m\dot{y}\dot{\varphi}l\sin\varphi=-mgl\sin\varphi. \quad (3)$$

Зразки варіантів розрахункових схем

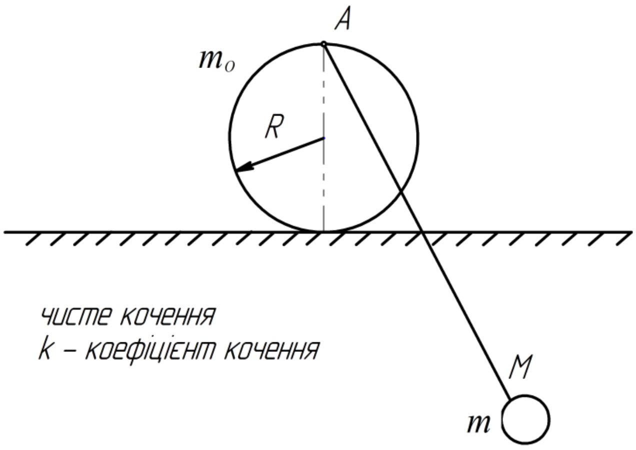
1.



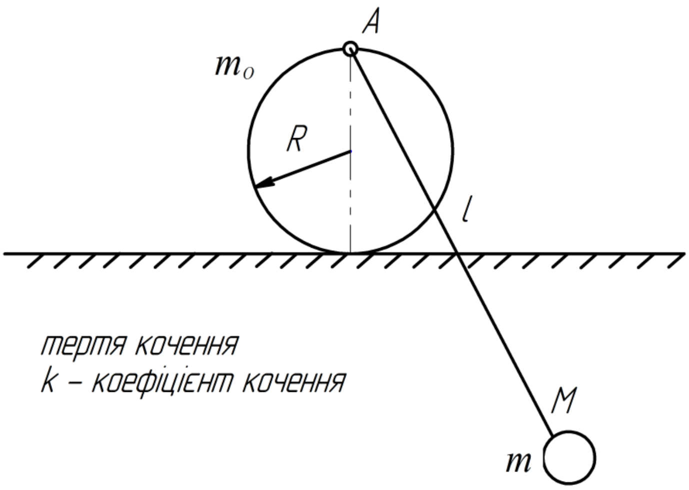
2.



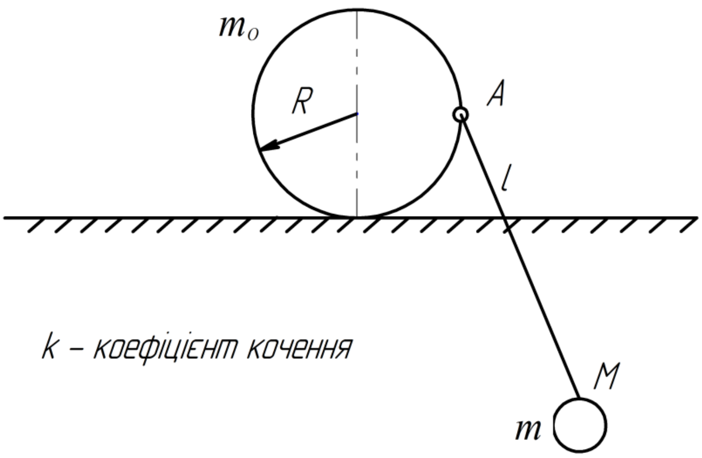
3.



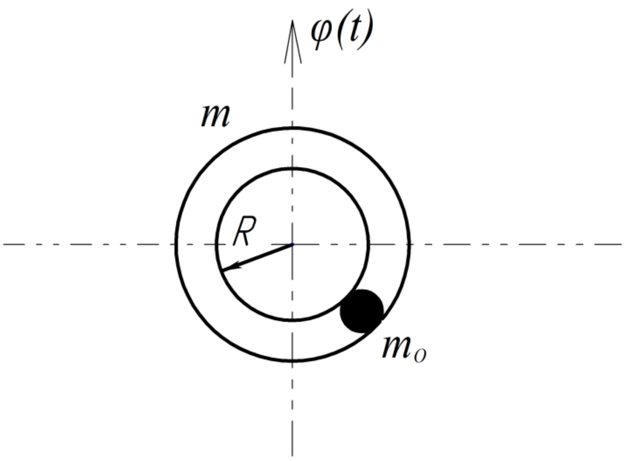
4.


A
m_o
R
l
тертя кочення
k – коефіцієнт кочення
M
m

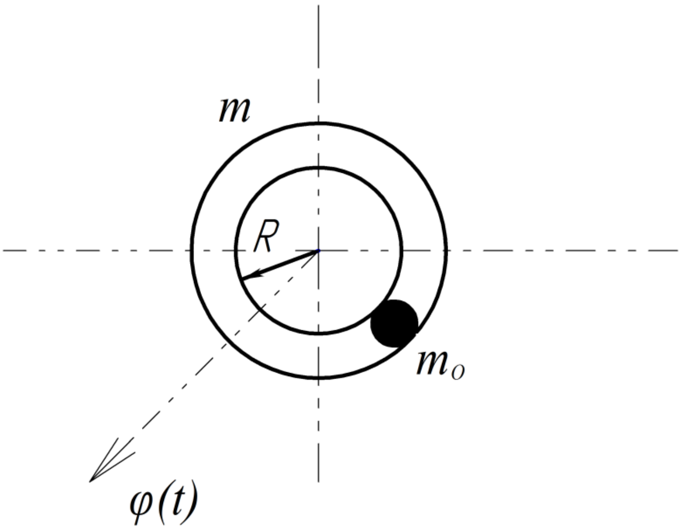
5.


m_o
R
A
l
k – коефіцієнт кочення
M
m

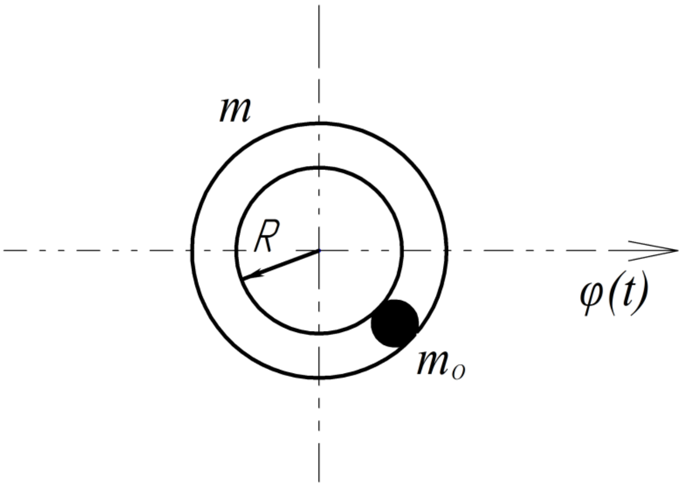
6.


φ(t)
m
R
m_o

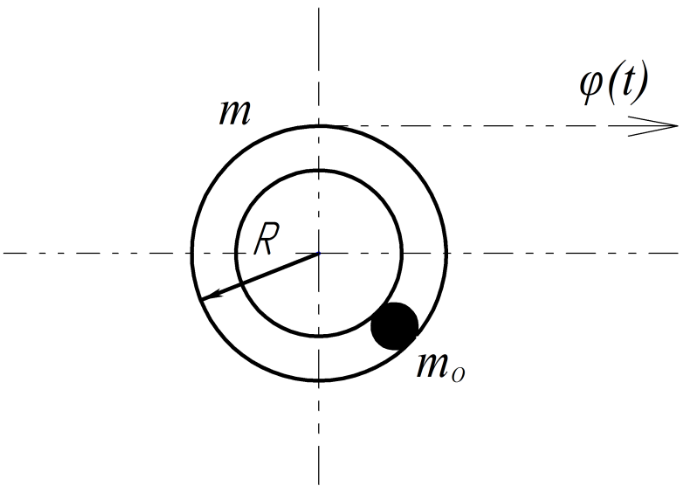
7.



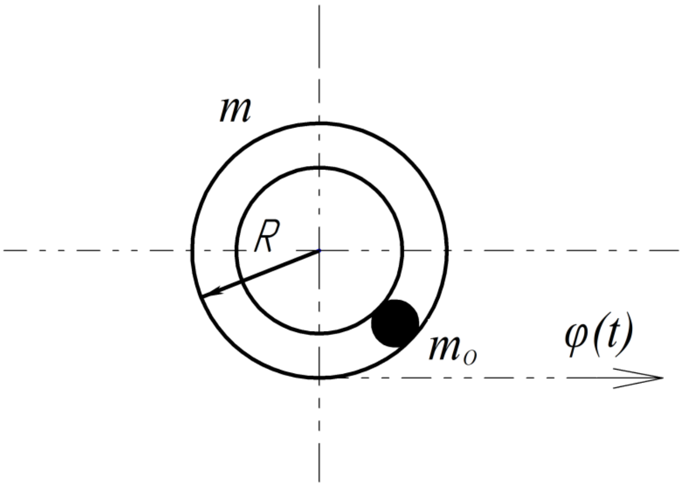
8.



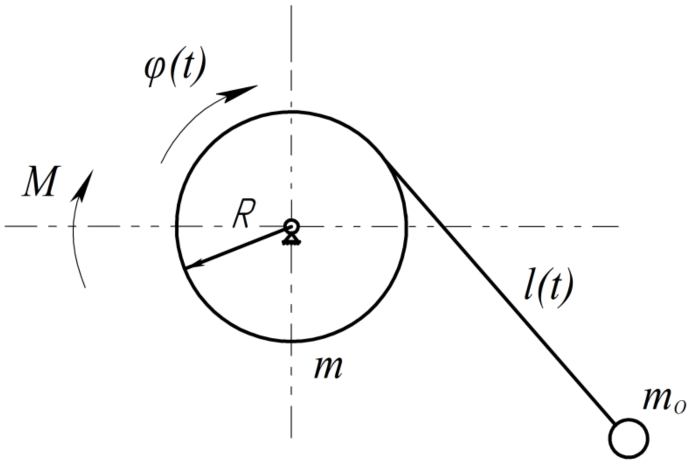
9.



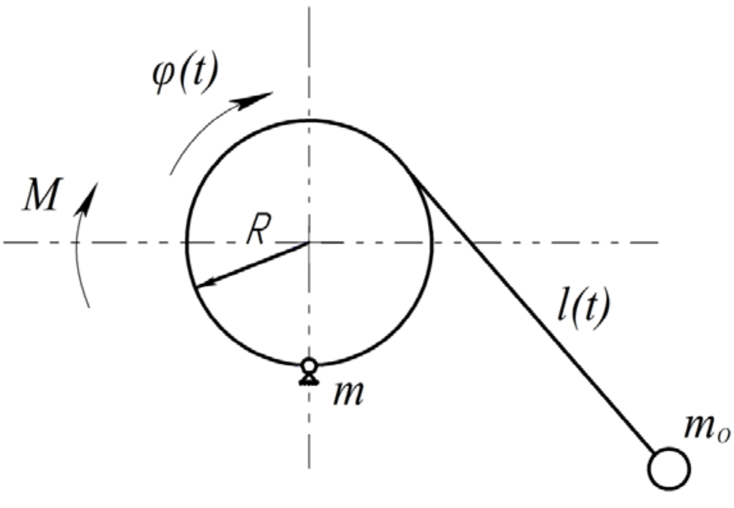
10.



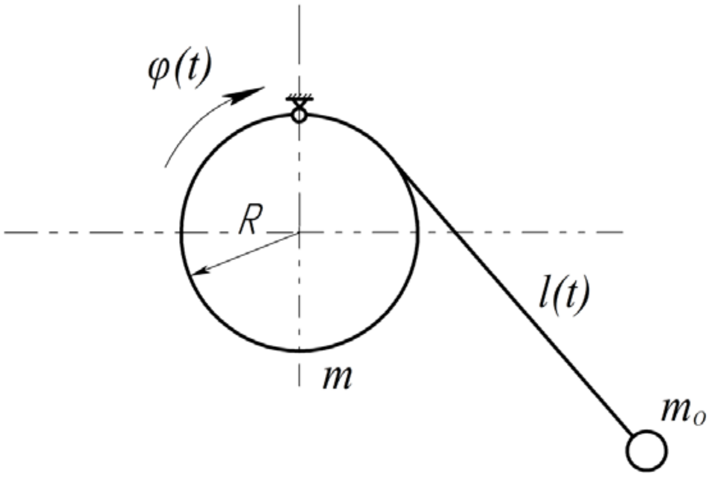
11.



12.

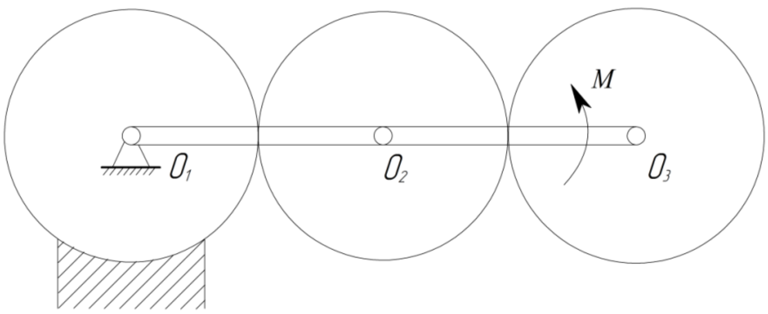


13.



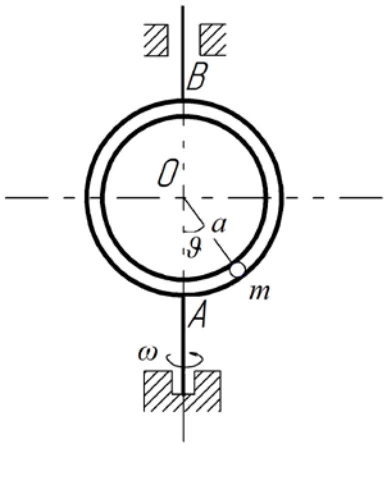
14.

У планетарному механізмі колесо з віссю O_1 нерухоме; до рукоятки O_1O_3 прикладений обертальний момент M; механізм розміщений у горизонтальній площині. Визначити кутове прискорення рукоятки, вважаючи колеса однаковими дисками з однаковими масами m і радіусами r і нехтуючи масою рукоятки.



15.

Матеріальна точка маси m рухається по круговій рамці радіусом a, яка обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо вертикального діаметра AB. Скласти рівняння руху точки і визначити момент M, необхідний для підтримки постійності кутової швидкості.



СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Павловський М.А., Заплатний В.І. Аналітична механіка: Навч.посібник. – К.: НМК ВШ, 1990. – 144с.
2. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512с: іл.
3. Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику. – М.: Наука, 1971. – 264с.
4. Путята Т.В., Фрадлін Б.Н. Методика розв'язування задач з теоретичної механіки. – К.: Рад. шк., 1955. – 368с.
5. Айзерман М.А. Классическая механика. – М.: Наука, 1974. – 357с.
6. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Наука, 1966. – 300с.
7. Добронравов В.В. Основы аналитической механики. – М.: Высш. шк., 1976. – 262с.
8. Вейц В. Л., Коловський М.З., Кочура А.Е. Динамика управляемых машинных агрегатов. – М.: Наука, 1984. – 352.
9. Воробьев Е.И., Понов С.А., Шевелева Г.Н. Механика промышленных роботов: Учебное пособие/ Под. Ред. К.В.Фролова. – М.: Высш. шк., 1988. – 304с.
10. Вульфсон Н.Н., Коловский М.З. Нелинейные задачи динамики машин. – Л.:Машиностроение, 1968. – 284с.
11. Лагранж И.Л. Аналитическая механика: В 2т. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. – т.1. – 594с.; т.2. – 400с.
12. Карачун В.В., Касьянов В.О. Теоретична механіка в прикладах і задачах: Навч. видання. – К.: КМУЦА, 1999. -252с.

13. Касьянов В.О., Карачун В.В., Ладогубець Н.В. Теоретична механіка. Динаміка: Конспект лекцій. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2007. – 240с. (Англ. мовою).
14. Бутенин Н.В. Теория колебаний: Учебник. – М.: Высш. шк., 1963. – 314 с.
15. Паловко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний: Учебник – М.: Наука, 1971.
16. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч.I - Ч.II. – М.: Физматгиз, 1961.
17. Попов Е.П., Пальтов И.П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 792 с.
18. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Госиздат физ.-мат. литературы, 1961. – 824 с.
19. Кошляков В.Н. Краткий курс теоретической механики. Кинематика. Кинетика: Учеб. – К.: Вища шк., 1993. – 312 с.
20. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: в 2 т. – М.: Наука, 1984. – Т.1. – 352 с.; Т.2. – 640 с.
21. Маркеев А.П. Теоретическая механика: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1990. – 416 с.
22. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. – М.: Наука, 1970. – 447 с.
23. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: В. 2 т. – М.: Высш. шк., 1977. – Т. 1. – 431 с.; Т. 2. – 532 с.
24. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. – М.: Высш. шк., 1966. – 255 с.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Скільки рівнянь Лагранжа II роду можна скласти?
2. Як визначити число ступенів вільності матеріальної системи?
3. Для якого руху – *абсолютного, переносного, відносного* – обчислюється кінетична енергія матеріальної системи, якщо необхідно скласти диференціальне рівняння відносного руху?
4. Кінетична енергія являється *додатньою* чи *від'ємною* величиною?
5. Кінетична енергія матеріальної системи є сума – геометрична, арифметична, алгебраїчна – окремих складових?
6. Якою фізичною величиною постає узагальнююча сила Q, якщо узагальнена координата q має розмірність $рад^2$?
7. Як обчислити віртуальну роботу δA на віртуальному переміщенні $\delta\varphi$?
8. Який фізичний зміст узагальненої координати q?
9. Який фізичний зміст узагальненої швидкості $\dot{q}$?
10. Скільки ступенів вільності має матеріальна система з чотирма узагальненими координатами q?
11. Чи можуть співпадати дійсні і віртуальні переміщення?
12. Три відміни дійсних і віртуальних переміщень?
13. Якими повинні бути віртуальні переміщення – *додатніми* чи *відмінними*?
14. Чим відрізняються *ідеальні* в'язі?
15. Якими рівняннями описуються *стаціонарні* і *нестаціонарні* в'язі?
16. Як описати *утримуючі* або *неутримуючі* в'язі?

ЗРАЗОК
оформлення титульного листа курсової роботи

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
“ Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського ”

Факультет біотехнології і біотехніки

Кафедра біотехніки та інженерії

КУРСОВА РОБОТА

з дисципліни *АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА*

«Застосування рівнянь Лагранжа ІІ роду для дослідження руху механічної системи з двома ступенями вільності»

Виконавець:	Прийняв:
Група_______________	
Курс _______________	_______________
Студент _____________	_______________
«__»_____________201_р.	(підпис)
	(П.І.Б.)
	«__»_____________201_р.